UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 19 y 21 de mayo de 2009.

Temas :
Vectores en el plano y en el espacio.
Producto escalar. Proyecciones.
Producto vectorial. Rectas y planos en el espacio.

Secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 del texto.

Observación importante:
es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

E1.- Dados los puntos A(1,0), B(3,1), C(4, 3), D(2, 2), averigüe si los siguientes vectores del plano son todos diferentes o no :
1a) **AB** ,1b) **CD** ,1c) **AC**, 1d) **DC** ,1e) **u**= **AB**+**BC**+**CD**+**DA** ,1f) **v**= **AB**+**CD** , 1g) **DD**.

E2.- Con los mismos datos del ejercicio anterior, halle las coordenadas del vector 2**AC**-**BD**.

E3.- Con los mismos datos del ejercicio anterior, halle, si posible, un valor de la constante k tal que el vector **AB**+k.**BC** sea :
3a) paralelo al vector **w**= (1, 7) ;
3b) perpendicular al vector **w**+**AC** .

E4.- Dados dos vectores **u**= (u_1, u_2) , **v**= (v_1, v_2) , escriba las dos fórmulas (algebráica y geométrica) que expresan el producto escalar **u**.**v** .

E5.- Usando las fórmulas del producto escalar para hallar el coseno de los tres ángulos internos del triángulo de vértices A(-46, 45), B(1, 1), C(4, 5), averigüe si el triángulo dado es o no es rectángulo.

E6.- En el plano cartesiano (Oxy) halle los dos vectores unitarios (es decir : de módulo =1) perpendiculares a la recta de ecuación 4x-3y+7 = 0 .

E7.- En el espacio tridimensional (Oxyz) halle todos los vectores unitarios perpendiculares al vector **u**=(3, 4, 12) ¿ Hay sólo dos ?

E8.- Diga si es cierto o falso que la expresión **u**(t) = t(1, 2, 5)=(t, 2t, 5t) representa todos los vectores del espacio tridimensional que son paralelos al vector **v**=(1, 2, 5).

E9.- Usando la fórmula para la distancia de dos puntos en el espacio, escriba la ecuación de la esfera que tiene centro C(1, 0, -2) y radio r=5 .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E10. Halle el vector proy$_{\mathbf{u}}$(**v**) proyección de **v** sobre **u** , siendo **u**=(1, 2, 2), **v**=(-5,0,3);

verifique que el vector **w**=**v**-proy$_{\mathbf{u}}$(**v**) es ortogonal (perpendicular) al vector **u**.

E11.- Dado (en el espacio) un paralelogramo de vértices A,B,C,D (con **AB**=**DC**), demuestre (usando vectores y sus operaciones) que las dos diagonales del paralelogramo se bisecan en sus puntos medios.

E12.- Halle la distancia del punto C(2, 2, 4) a la recta que pasa por los dos puntos A(1, 2, 3), B(3, 3, 5).[sugerencia : observe que si C' es un punto de la recta tal que el segmento CC' sea perpendicular a la recta, entonces el vector **AC'** es la proyección del vector **AC** sobre el vector **AB**] .

E13.- Diga, justificando, si los tres puntos A(1, 7, 0), B(5, -5, 20), C(-2, 16, -15) pertenecen o no a una misma recta.

E14.- Sea (Oxyz) un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio, con los ejes orientados de tal forma que un observador, con los piés en el origen y la cabeza en el semieje z positivo, vea <u>antihoraria</u> la rotación del eje x, para sobreponerse al eje , girando por el ángulo menor.
Dados dos vectores **u**= (u_1, u_2, u_3) , **v**= (v_1, v_2, v_3) , escriba la definición del producto vectorial **u**x**v** y la fórmula algebráica que lo expresa.

E15.- Use el producto vectorial, para obtener un vector, **u**, perpendicular al plano que contiene los tres puntos A(1, 0, 3), B(2, -5, 0), C(1, 1, 7).

E16.- Con los mismo datos del ejercicio anterior, halle la distancia del punto D(2, 3, 4) al plano que pasa por los puntos A, B, C [sugerencia : proyecte el vector AD sobre el vector **u**].

E17.- Dado, en el espacio (Oxyz) un paralelogramo de vértices A, B, C, D (con **AB**=**DC**), exprese el área del paralelogramo ABCD y el área del triángulo ABD por medio del producto vectorial **AB**x**AD** .

E18.- a)Diga si es cierto o falso que el valor absoluto del producto "mixto" (**AB**x**AC**).**AD** representa el volumen de un paralelepípedo uno de cuyos vértices es A y cuyas tres aristas, relativas al vértice A son los segmentos AB, AC, AD.
b)¿ Qué relación tiene ese número con el volumen de la piramide de vértices A, B, C, D ?

E19.- Use el resultado del ejercicio anterior para verificar si los cuatro puntos A(1, 2, 3), B(1, -2, 0), C(2, 1, 5), D(1, 2, 1) pertenecen o no a un mismo plano.

E20.- Averigüe si los tres vectores **AB, BC, CD** (siendo A, B, C, D los mismos puntos que en el ejercicio anterior) son paralelos a un mismo plano o no.

E21.- Averigüe si las dos rectas que pasan , respectivamente, por los puntos A, B y C, D (los mismos de los dos ejercicios anteriores), pertenecen a un mismo plano o no.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E22.- Halle el coseno del ángulo agudo que forman las dos rectas del ejercicio anterior.

E23.- Dado el vector **w**= (1, 1, 1) , halle dos vectores unitarios **u**, **v**, tales que los tres vectores **u**, **v**, **w** sean dos a dos perpendiculares. [nota : hay infinitas posibles solucioneS].
[sugerencia : halle primero dos vectores, **u**, **v**, tales que **u**, **v**, **w** sean dos a dos perpendiculares y luego divida a los dos, cada uno por su módulo].

E24.- Escriba una ecuación paramétrica vectorial, ecuaciones paramétricas escalares y ecuaciones simétricas, para cada una de las siguientes rectas :
24a) Recta, r, que para por A(1, 2, 3) y es paralela al vector **u**(-1, 5, 2) ;
24b) recta, s, que pasa por los dos puntos (A(1, 2, 3), B(, 3, 5, 9) ;
24c) recta, m, intersección de los dos planos de ecuaciones x+y-z = 1, x+3y-4z = 0 .

E25.- Halle una ecuación para cada uno de los siguientes planos :
25a) Plano. α, que pasa por el punto A(1, 3, 0) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos P(2, 2, 2) , Q(3, 4, 7) ;
25b) plano. β, que pasa por los tres puntos A(1, 1, 0), B(2, -1, 4), C(2, 3, 1);
25c) plano, γ, que pasa por los dos puntos A(1, 1, 0), B(2, -1, 4) y es paralelo a la recta de ecuaciones x-1= 2y+4 = 3-z ;
25d) plano, δ, que pasa por el punto A(1, 1, 0) y además es perpendicular al plano de ecuación x+4y-3z=17 y paralelo a la recta de ecuaciones x =y =z .

E26.- Halle el coseno del ángulo agudo que forma la recta representada por x = 2y = 3z con la recta intersección de los dos planos de ecuaciones x+z=0, x - 2z +3y = 6.

E27.- Halle el seno del ángulo agudo que forman el plano de ecuación x+y+2z = 4 con la recta que pasa por los puntos A(1, 1, 1), B(2, 3, -5) .

E28.- Halle la distancia del punto C(2, 2, 4) a la recta que pasa por los dos puntos A(1, 2, 3), B(3, 3, 5).

E29.- Halle la distancia entre las dos rectas representadas por : $\begin{cases} x+y-3z=4 \\ x-y+7z=0 \end{cases}$, x=y=z.
[sugerencia : si A es un punto de la primera recta, B es un punto de la segunda recta, **u** es un vector perpendicular a ámbas rectas, entonces la distancia pedida es el módulo del vector $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{AB}$] .

E30.- Dado el tetraedro de vértices O(0, 0, 0), A(1, 2,-3), B(1, 1, 0), C(3,-2, 5) , halle la proyección ortogonal del vértice A sobre el triángulo OBC [es decir : el punto de intersección del plano por O, B, C con la recta que pasa por A y es perpendicular a tal plano].

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

respuestas.

SE1) AB= (2, 1) = **DC** ; **CD**=(-2,-1) ; **AC**= (3, 3) ; **u**=**v**= **DD**= (0, 0) .

SE2) 2**AC** - **BD** =2(3, 3) - (-1, 1) = (7, 5) .

SE3a) AB + k. **BC** =(2+k, 1+2k) = (?) $\lambda(1, 7) \Rightarrow \begin{cases} 2+k = \lambda \\ 1+2k= 7\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda- k = 2 \\ 7 \lambda -2k= 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & -13/5 \end{array}\right] \Rightarrow k = \frac{-13}{5}$;

3b) (1, 7)+**AC** = (4, 10) ; (**AB** + k. **BC**).(4, 10) = 0 $\Rightarrow$ (2+k).4+(1+2k).10 = 0 $\Rightarrow$ 3+4k = 0 $\Rightarrow$ $k = \frac{-3}{4}$.

SE4) u.v = $u_1v_1+ u_2v_2$;
u.v = $|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos(\varphi)$ siendo φ el ángulo que forman los dos vectores.

SE5) AB= (47, -44) ; **BC**= (3, 4) ; **CA** = (-50, 40) .
El coseno del ángulo que forman dos vectores, **u**, **v** se obtiene despejando cos(φ) de la igualdad : $u_1v_1+ u_2v_2 = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\cos(\varphi)$;
para que el triángulo sea rectángulo, dos de los lados del triángulo deben ser perpendiculares y por lo tanto tener coseno del ángulo que forman =0 .
Como ninguno de los tres productos escalares **AB**.**BC**, **BC**.**CA** , **CA**.**AB** es nulo, resulta que el triángulo dado <u>no es</u> rectángulo.
Por ejemplo : **AB**.**BC**= (47, -44).(3, 4) = 141-160 = -19 $\neq$ 0 etc.

SE6) Hallemos dos cualesquiera puntos (distintos), A(-1, 1), B(2, 5) de la recta dada; el vector
AB = (3, 4) es un vector paralelo a la recta. Un vector, **u**=(u_1,u_2) será perpendicular a la recta si y sólo si **u**.(3, 4) = 0, luego $3u_1+4u_2= 0$, de manera que todos los vectores perpendiculares a la recta se obtienen con la fórmula : $(u_1,u_2) = (4t, -3t)$;
para que uno de tales vectores tenga módulo =1 , deberá ser $(4t)^2+(-3t)^2 = 1 \Rightarrow t=\pm \frac{1}{5}$.

Entonces los dos vectores pedidos son : $(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ y su opuesto.

SE7) Un vector, **u**= (u_1,u_2,u_3) es perpendicular al vector (3, 4, 12) si y sólo si (u_1,u_2,u_3).(3, 4, 12)= 0 , por lo tanto, resolviendo el sistema homogéneo (de una sola ecuación...) : $[3 \;\; 4 \;\; 12 \,|\, 0]$ tenemos : $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; entonces todos los vectores unitarios perpendiculares al vector dado, se obtienen con la fórmula :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$\frac{(4a+4b, -3a, -b)}{\sqrt{(4a+4b)^2+9a^2+b^2}}$, con valores arbitrarios (no ámbos nulos) de las constantes a, b, de manera que hay más que dos vectores como los que se piden (hay un número infinito de ellos).

SE8) Es cierto : por definición, el vector λ**AB** es un vector paralelo al vector **AB** ; inversamente, si el vector **PQ** es paralelo al vector (no nulo) **AB** y si $t=\frac{PQ}{AB}$ = cociente de las longitudes de los segmentos PQ, AB, entonces, si los segmentos orientados AB, PQ tienen el mismo sentido, se tiene **PQ**= t.**AB** , mientras que si tienen sentido opuesto, se tiene : **PQ**= -t.**AB** .

SE9) $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2= 25$.

SE10) $\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{v}.\mathbf{u})\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{(-5, 0, 3).(1, 2, 2)}{9}(1, 2, 2) = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$;

$\mathbf{w}=\mathbf{v}-\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (-5, 0, 3) - (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}) = (\frac{-46}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{25}{9})$;

$\mathbf{w}.\mathbf{u}= (\frac{-46}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{25}{9})(1, 2, 2) = (-46-4+50) / 9 = 0.$

SE11) Indiquemos con M el punto medio de la diagonal AC y con N el punto medio de la diagonal BD. Verificaremos que M=N constatando que los dos vectores **AM**, **AN** son iguales.

$\mathbf{AM} = \frac{1}{2}\mathbf{AC} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})$; $\mathbf{AN} = \mathbf{AB}+\frac{1}{2}\mathbf{BD} = \mathbf{AB} + \frac{1}{2}(\mathbf{BC}+\mathbf{CD}) =$

$= \frac{1}{2}(2\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CD}) = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} +(\mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CD})) = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} +\mathbf{AD})$ y como los dos vectores **BC**, **AD** estan representados por lados opuestos de un paralelogramo, orientados en forma concorde, se tiene **BC** = **AD** por lo cual **AN** = **AM** .

SE12) AB = (2, 1, 2) , **AC** = (1, 0, 1) . Siguiendo la sugerencia :

$\text{proy}_{\mathbf{AB}}(\mathbf{AC}) = \frac{\mathbf{AC}.\mathbf{AB}}{(AB)^2}\mathbf{AB} = \frac{4}{9}(2, 1, 2)$; $\mathbf{C'C}= \mathbf{AC} - \text{proy}_{\mathbf{AB}}(\mathbf{AC}) = \frac{(1,-4, 1)}{9}$;

Distancia del pto. C a la recta por A, B = $|\mathbf{CC'}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

SE13) **AB** = (4,-12, 20) ; **AC** = (-3, 9,-15) ; como $\mathbf{AC} = \frac{-3}{4}\mathbf{AB}$, los tres puntos efectivamente pertenecen a la misma recta.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

SE14) el producto vectorial, $\mathbf{w}=\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}$ es un vector i) cuyo módulo es $|\mathbf{w}|=|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.|\mathrm{sen}(\varphi)|$;
ii) cuya dirección es perpendicular a las direcciones de **u**, **v** ;
iii) cuyo sentido es tal que, si OA, OB, OC son segmentos orientados tales que **u** = **OA**, **v** = **OB**, **w** = **OC** , entonces un observador con los piés en O y la cabeza en C, ve antihoraria la rotación que lleva OA a sobreponerse a OB, girando por el ángulo menor.

La fórmula algebráica que representa al producto vectorial $\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}$, es $\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

SE15) AB = (1,-5,-3) , **AC** = (0, 1, 4) , $\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-17, -4, 1)$.

SE16) AD = (1, 3, 1) ; la distancia pedida es igual al módulo del vector :

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{AD}) = \frac{(1, 3, 1).(-17,-4,1)}{|\mathbf{u}|^2}\ \mathbf{u} = \frac{-28}{|\mathbf{u}|^2}\ \mathbf{u}\ ;\ \ |\mathrm{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{AD})\ | = \frac{28}{|\mathbf{u}|} = \frac{28}{\sqrt{306}} = \frac{14\sqrt{34}}{51}\ .$$

SE17) Area del paralelogramo = $|\mathbf{AB}\mathrm{x}\mathbf{AD}|$; área del triángulo = $\frac{1}{2}|\mathbf{AB}\mathrm{x}\mathbf{AD}|$.

SE18a) es cierto;

18b) volumen de la piramide de vértices A, B, C, D = $\frac{1}{6}|(\mathbf{AB}\mathrm{x}\mathbf{AC}).\mathbf{AD}|$.

Observación importante : se puede pensar de obtener el producto escalar de dos vectores, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) = m_1\mathbf{i}+m_2\mathbf{j}+m_3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k}$, reemplazando los símbolos **i**, **j**, **k** en la fórmula del primer factor, respectivamente, por las componentes del segundo factor $(m_1\mathbf{i}+m_2\mathbf{j}+m_3\mathbf{k}).(w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k}) = m_1w_1+m_2w_2+m_3w_3$;
actuando en esta forma, en el caso del producto escalar de los dos vectores :

$\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, se obtiene que el "producto mixto" $(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}).\mathbf{m}$ se puede expresar reemplazando en el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, los símbolos **i**, **j**, **k** , por m_1, m_2, m_3 , y se obtiene : $(\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}).\mathbf{m} = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE19) **AB**= (0,-4,-3) , **AC** = (1,-1, 2). **AD** = (0, 0,-2) ; $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$;
esto significa que el tetraedro (=piramide de base triangular) de vértices A, B, C, D tiene volumen no nulo (8/6 unidades cúbicas de medida) por lo cual los cuatro puntos <u>no pueden</u> pertenecer a un mismo plano.

SE20) Los tres vectores que se mencionan serían paralelos a un mismo plano si y sólo si los cuatro puntos A, B, C, D perteneciesen a un mismo plano, así que, por el resultado del ejercicio anterior, resulta que los tres vectores <u>no son paralelos a un mismo plano</u>.

SE21) No pertenecen a un mismo plano, ya que a un tal plano pertenecerían los cuatro puntos A, B, C, D [ver ejercicio 19].

SE22) **AB**= (0,-4,-3) , **CD** = (-1, 1,-4) ; **AB.CD**= AB.CD.cos(φ) = (0,-4,-3).(-1, 1,-4)= 8 ;
AB =$|\mathbf{AB}|$= 5 , CD=$|\mathbf{CD}|$= $\sqrt{18}$; $\cos(\varphi) = \dfrac{8}{AB.CD} = \dfrac{8}{15\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{15}$.
El ángulo que forman dos rectas en el espacio, se define generalmente como el ángulo que forman dos rectas paralelas a las dadas , que pasen por un mismo punto (y se hallan por lo tanto en un mismo plano); en el caso genérico, se obtiene un ángulo agudo,φ , y su complemento obtuso π-φ (suponiendo que los dos rectas no sean perpendiculares).
Como el número que resultó de los cálculos de este ejercicio es positivo, se trata efectivamente del coseno del ángulo agudo; si hubiese resultado negativo, hubiéramos tenido que considerar su opuesto.

SE23) Sean **u =** (u_1,u_2,u_3), **v**=(v_1, v_2, v_3); para que **u** sea perpendicular a (1, 0, 0) debe ser: **u**.(1, 1, 1)=$u_1+u_2+u_3$ =0 , por ejemplo podemos considerar **u**= (0, 1,-1) ;
para que **v** sea perpendicular a ámbos, (1, 1, 1), (0, 1, -1) , debe ser : $\begin{cases} v_1+v_2+v_3 = 0 \\ v_2-v_3 = 0 \end{cases}$ así que podemos tomar **v**= (-2a, a, a) con cualquier a≠0 , por ejemplo **v**= (-2, 1, 1) .
Por último, obtengamos los vectores pedidos, dividiendo **u**, **v** cada uno por su módulo :

$$\mathbf{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{v} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

SE24a) ecuación paramétrica vectorial : **OP** =(1, 2, 3)+t(-1, 5, 2) ;
ecuaciones paramétricas escalares : $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+5t \\ z=3+2t \end{cases}$; ecuaciones simétricas : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{2}$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

ojo : estas ecuaciones **no** son únicas ya que dependen de un punto de la recta y un vector paralelo. A título de ejemplo, si en lugar de usar el punto A(1, 2, 3) y el vector **u**=(-1, 5, 2) hubiésemos usado otro punto de la recta, por ejemplo B(0, 7, 5) y otro vector paralelo, por ejemplo **v**=(2,-10,-4) , habríamos hallados las ecuaciones siguientes :

OP =(0, 7, 5)+t((2,-10,-4); $\begin{cases} x=2t \\ y=7-10t \\ z=5-4t \end{cases}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-7}{-10} = \frac{z-5}{-4}$.

24b) u=AB=(2, 3, 6) ; **OP**=(1, 2, 3)+t(2, 3, 6) ; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{6}$; $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+6t \end{cases}$.

24c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow ... \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x= 3/2- (1/2)t \\ y= -(1/2) + (3/2)t \\ z=t \end{cases}$; usando el punto C(1, 1, 1) [que se obtiene de la representación paramétrica hallada, con t=1] y el vector paralelo **u**= (-1, 3, 2), podemos también obtener otra representación paramétrica :

OP= (1, 1, 1)+t(-1, 3, 2) ; $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+3t \\ z=1+2t \end{cases}$ y las ecuaciones simétricas: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$.

SE25a) vector perpendicular al plano : **n** = **PQ**=(1, 2, 5) ; 1.(x-1)+2.(y-3)+5.(z-0) = 0 ;
x+2y+5z - 7 = 0 .

25b) un vector perpendicular al plano dado, se obtiene como vector perpendicular a los dos vectores **AB**= (1,-2, 4) , **AC**= (1, 2, 1) ⇒ **n=** (1,-2, 4)x(1, 2, 1)= (-10, 3, 4) ;
-10.(x-1)+3.(y-1)+4.(z-0) = 0 ; -10x+3y+4z+7 = 0 .

25c) un vector paralelo a la recta dada es **v**=(2, 1,-2) ; un vector perpendicular al plano pedido será perpendicular a los vectores **v**, **AB**= (1,-2, 4) , así que podemos tomar :
n= **AB**x**v** =(0, 10, 5) o (0, 2, 1) ⇒ ecuación del plano pedido : 2y+z = 2 .

25d) un vector perpendicular al plano que se busca , será perpendicular a los vectores (1, 4,-3), (1, 1, 1), luego **n** = (1, 4,-3)x(1, 1, 1)= (7,-4,-3) ⇒ 7(x-1)-4(y-1)-3(z-0) = 0 ;
7x-4y-3z -3 = 0.

SE26) vector paralelo a la primera recta : **u**= (6, 3, 2) ; vector paralelo a la segunda recta : **v**= (-1, 1, 1) ; |**u**|.|**v**|cos(φ) = **u**.**v** = (6, 3, 2).(-1, 1, 1) = -6+3+2 = -1 ;
|**u**|= 7; |**v**|= $\sqrt{3}$ ⇒ cos(φ) = $\frac{-1}{7\sqrt{3}}$ = coseno de un ángulo obtuso ; si de este número consideramos el valor absoluto, o si en lugar del vector **v** consideramos el vector (1,-1,-1),

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

obtenemos el coseno del ángulo agudo que forman las dos rectas dadas : $\frac{1}{7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{21}$.

SE27) el seno del ángulo agudo entre el plano y la recta dados, es el coseno del ángulo agudo que forman la recta dada y una perpendicular al plano. Por lo tanto tenemos , considerando los dos vectores : **n** = (1, 1, 2) , **u**= -1,-2, 6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\quad$ $\text{sen}(\alpha) = \cos(\varphi) = \frac{\mathbf{n.u}}{|\mathbf{n}|.|\mathbf{u}|} = \frac{9}{\sqrt{6}.\sqrt{41}}$.

SE28) Este es el ejercicio #12 de este problemario **IV** :
AB = (2, 1, 2) , **AC** = (1, 0, 1) . Siguiendo la sugerencia [del ejercicio 12] :
$\text{proy}_{\mathbf{AB}}(\mathbf{AC}) = \frac{\mathbf{AC.AB}}{(AB)^2}\mathbf{AB} = \frac{4}{9}(2, 1, 2)$; $\mathbf{C'C} = \mathbf{AC} - \text{proy}_{\mathbf{AB}}(\mathbf{AC}) = \frac{(1,-4, 1)}{9}$;

Distancia del pto. C a la recta por A, B = $|\mathbf{CC'}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

SE29) hallemos previamente dos vectores : **v**=(1, 1,-3)x(1,-1, 7) = (4,-10,-2), paralelo a la primera recta, **w**=(1, 1, 1) , paralelo a la segunda recta, y $\mathbf{u} = \mathbf{w}\text{x}(\frac{1}{2})\mathbf{v} = (4, 3,-7)$.
Un punto de la primera recta es A(2, 2, 0), un punto de la segunda recta es B(0, 0, 0).
Siguiendo la sugerencia : $\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{AB}) = \frac{(-2,-2,0).(4, 3-7)}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} \Rightarrow |\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{AB})| = \frac{14}{\sqrt{74}}$.

SE30) Para hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos O, B, C , hallemos un vector,
n, perpendicular a los vectores **OB**= (1, 1, 0) , **OC** = (3,-2, 5) : **n** = (1,-1,-1) ;
ecuación del plano, α, que pasa por O, B, C : x-y-z = 0 ; recta, r, por A, perpendicular al plano α : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-3-t \end{cases}$; el punto, A', intersección de la recta r con el plano α, se puede obtener resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-3-t \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$(1+t)-(2-t)-(-3-t) = 0 \Rightarrow t= -2/3 \Rightarrow A'(1/3, 8/3, -7/3)$.